සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

№ 20064

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1989
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1989

(01) ශුද්ධ ගණිතය II
(01) Pure Mathematics II

විෂය අංකය		
01	S	II

පැ තුනයි/*Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. ABC යනු ත්‍රිකෝණයකි. D, E, F යනු පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වන අතර O යනු DEF ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වේ. AO ට X හි දී EF හමුවේ. BO ට Y හි දී FD හමුවන අතර CO ට Z හි දී DE හමුවේ.

$$\frac{BD.CE.AF}{DC.EA.FB} = \frac{FX.EZ.DY}{XE.ZD.YF}$$ බව සාධනය කරන්න.

DX, EY, FZ ඒකලක්ෂ්‍ය නම් හා එසේ නම් ම පමණක් AD, BE, CF ඒකලක්ෂ්‍ය බව අපෝහනය කරන්න.

2. තල දෙකක් අතර කෝණය අර්ථ දක්වන්න.

α තලය මත පිහිටි m සහ n සරල රේඛා O ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙකට ඡේදනය වේ. m සහ n දෙකට ම ලම්බව O හරහා යන සරල රේඛාව α ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

$OABC$ චතුස්තලයක AOC තලය BOC තලයට ලම්බ වන අතර $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ වේ. BC, OC ට ලම්බ සහ CA, OA ට ලම්බ නම් AOC සහ AOB තල අතර කෝණය BAC කෝණයට සමාන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් AOC සහ AOB තල දෙක අතර කෝණය, a, b, c ඇසුරෙන් සොයන්න.

$\angle AOC = \angle COB = \frac{\pi}{4}$ නම් $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

3. $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව $u_i = 0$ $(i = 1, 2)$ සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙක පිළිවෙලින් A සහ B හි දී ඡේදනය කරයි; මෙහි $u_i \equiv a_ix + b_iy + c_i$ වේ. Z යනු $AZ = k\,ZB$ වන සේ AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$u_1 = 0$ සහ $u_2 = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට Z යා කරන රේඛාව

$$u_1 + \frac{k(a_1b - ab_1)}{a_2b - ab_2}\,u_2 = 0$$

බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද පිළිවෙලින් $x - 4y + 6 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x - y + 3 = 0$ රේඛා ඔස්සේ වේ. X යනු $2BX = XC$ වන සේ BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද Y යනු $2AY = 3YC$ වන සේ AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ.

AX සහ BY හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට C යා කරන රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

4. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තයේ $lx + my + n = 0$ ඔස්සේ පිහිටන ජ්‍යාය ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යයේ දී සෘජු කෝණයක් ආපාතනය කිරීමට අවශ්‍යතාව සොයන්න.

ඒ නයින් $S = 0$ වෘත්තයෙහි විචල්‍ය PQ ජ්‍යායක් මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි දී සෘජු කෝණයක් ආපාතනය කරයි නම් එවිට මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට PQ ට අඳින ලද ලම්බකයේ අඩියෙහි පථය $x^2 + y^2 + gx + fy + c/2 = 0$ වෘත්තය බව පෙන්වන්න.

5. (i) $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න. $S_1 = 0$ සහ $S_2 = 0$ ප්‍රලම්බ සහ P සහ Q ලක්ෂ්‍යවලදී ඡේදනය වේ යයි සිතමු. වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යාකරන රේඛාව විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය P සහ Q හරහා යන බව පෙන්වා එහි සමීකරණය සොයන්න.

(ii) කේන්ද්‍රය (ρ, α) සහ අරය a වන වෘත්තයේ ධ්‍රැවක සමීකරණය

$$r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha) = a^2 - \rho^2$$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම වෘත්තය ධ්‍රැවය හරහා යයි නම් එහි සමීකරණය $r = 2\rho \cos(\theta - \alpha)$ වන බව අපෝහනය කරන්න.

$r = a \cos\theta + b \sin\theta$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය සොයන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $P(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සහ අභිලම්බයේ සමීකරණ සොයන්න.

P හි දී අභිලම්බය පරාවලයේ අක්ෂය Q හි දී හමුවන අතර O යනු පරාවලයේ ශීර්ෂය වේ. O, P, Q හරහා යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයෙහි පථය පරාවලයක් බව පෙන්වා නාභිය සහ නාභිය ලම්බය සොයන්න.

තවද, P හි දී ස්පර්ශකය පරාවලයේ අක්ෂය R හි දී හමුවේ නම් P, Q, R හරහා යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය අචල ලක්ෂ්‍යයක් බවද PQR කෝණය $\tan^{-1} 1/t$ බව ද පෙන්වන්න.

7. නාභිය සහ නියාමක අක්ෂය සිට ඉලිප්සය මත ලක්ෂ්‍යයකට ඇති දුර අතර සම්බන්ධතාව උපයෝගී කරගනිමින් ඉලිප්සයක සමීකරණය සම්මත ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

ඉලිප්සයක ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය, මහා අක්ෂයේ අන්තවලදී අඳින ලද ස්පර්ශක R සහ R' හිදී ඡේදනය කරයි. RR' විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තය නාභි හරහා යන බව සාධනය කරන්න.

8. $xy = c^2$ සෘජුකෝණාස්‍ර බහු වලය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් t පරාමිතිය වන $(ct, c/t)$ මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

A, B, C යනු ඉහත බහුවලය මත ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනකි. ABC ත්‍රිකෝණයේ H ලම්බ කේන්ද්‍රය ද බහුවලය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

HA', HB', HC' ජ්‍යායන් පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාදවලට සමාන්තරව ඇඳ ඇත්නම් AA', BB', CC' සමාන්තර බව සාධනය කරන්න.

H' යනු $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණයේ ලම්බ කේන්ද්‍රය නම් HH' මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යා නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

9. (i) $\tan(\theta + \alpha) - (3 + 2\sqrt{2}) \tan\theta = 0$ නම්, θ සඳහා තාත්වික විසඳුම් තිබීමට $\sin\alpha$ හි පරාසය ප්‍රකාශ කරමින් $\sin(2\theta + \alpha) = \sqrt{2} \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - (3 + 2\sqrt{2}) \tan\theta = 0$$

සමීකරණය සපුරාලනු ලබන θ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම් θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා

$$\tan A + \tan(B + \theta) + \tan(C - \theta) = \tan A \tan(B + \theta) \tan(C - \theta)$$

බව සාධනය කරන්න.

(iii) $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\cot^{-1} \frac{1}{2})$ සමීකරණය විසඳන්න.

10. සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$ බව සාධනය කරන්න.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$$ නම්

(අ) $$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sin B}$$

(ආ) $$\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2}{\sin^2 \frac{B}{2}}$$

බව පෙන්වන්න.

11. (i) එක්තරා නගරයක අනතුරු සිදුවීම් පිළිබඳ අධ්‍යයනයක් කිරීමට සමීක්ෂණයක් කර ඇත. නගරය තුළ පසුගිය දින 200 තුළ සිදුවන ලද අනතුරු සංඛ්‍යාව පහත සඳහන් වගුවේ දී ඇත:

දිනකට අනතුරු සංඛ්‍යාව	0	1	2	3	4	5
දින සංඛ්‍යාව	48	75	36	26	10	5

දිනකට අනතුරුවල මධ්‍යන්‍යය සංඛ්‍යාව සහ අනතුරුවල විචලතාව ගණනය කරන්න.

(ii) එක්තරා පරීක්ෂණයක දී ගණිතය සඳහා සිසුන් 20 දෙනෙකු ලබාගන්නා ලද ලකුණුවල සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 45 සහ 15 ලෙස ගණනය කර ඇත. මෙවා ගණනය කිරීමේ දී එක ශිෂ්‍යයෙකුගේ ලකුණු 80 ලෙස සාවද්‍යව කියවා ඇත. මෙම ශිෂ්‍යයාගේ සත්‍ය ලකුණු 60 නම් නිරවද්‍ය සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

12. ස්ත්‍රීපුරුෂත්ව ව්‍යාප්තිය සම ලෙස සම්භාවීයයි උපකල්පනය කරමින් ළමයි 4 ක් සිටින පවුලක

(අ) හරියටම ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙකු

(ආ) අඩුවශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙකු

සිටීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

එක්තරා ගමක එක එකක ළමයි 4 ක් සිටින පවුල් 64 ක් ඇත. මෙම 64 න් එක එකක

(අ) හරියට ම ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙකු

(ආ) අඩු වශයෙන් එක් ගැහැණු

ළමයෙකු සිටින පවුල් r සංඛ්‍යාවක් තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

මෙම පවුල් 64 න් එක එකක

(අ) හරියට ම ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙකු

(ආ) අඩු වශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙකු

සිටින, ඔබ අපේක්ෂා කරන පවුල් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

[$E(X) = np$ යයි ඔබට උපකල්පනය කල හැක : මෙහි X සසම්භාවී විචල්‍යයට

$Pr\ (X = x) = {}^nc_x p^x\ (1-p)^{n-x},\ \ x = 0, 1, \ldots n$

සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සහිත ද්විපද ව්‍යාප්තියක් ඇත.]